

## XXIII Konkurs Matematyczny Euklides 2024 - zadania na etap szkolny

**Zad. 1.** Liczbę 100 przedstaw w postaci sumy dwóch składników tak, aby suma ich kwadratów była najmniejsza.

**Zad. 2.** Krótsza przekątna trapezu prostokątnego dzieli ten trapez na dwa trójkąty, z których jeden jest równoboczny. Wysokość trapezu jest równa  $6\sqrt{3}$  cm. Oblicz pole trapezu.

**Zad. 3.** Doprowadź do najprostszej postaci wyrażenie:

$$\left(\frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}\right) \cdot \left(\frac{a^2+b^2}{2ab} + 1\right) \cdot \frac{ab}{a^2+b^2}, \text{ a następnie oblicz jego wartość dla } a = \frac{1}{2}, b = 0,25.$$

**Zad. 4.** W koło wpisano trójkąt równoramienny ABC ( $|AC|=|BC|$ ), w którym kąt ACB ma miarę  $30^\circ$ . Wysokość opuszczona z wierzchołka C jest równa  $4\sqrt{3}$  cm. Oblicz promień koła i pole trójkąta ABC.

**Zad. 5.** Dana jest funkcja  $f(x) = ax^2 + bx + c$

a) Wyznacz współczynniki  $a, b, c$  wiedząc, że funkcja ma wartość największą równą  $\frac{25}{2}$ , jej osią symetrii jest prosta o równaniu  $x = \frac{1}{2}$ , a jednym z miejsc zerowych jest  $x = -3$ .

b) Naskicuj wykres funkcji  $g(x) = \left|f\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right|$ .

**Zad. 6.** Prosta  $k$  przechodzi przez punkty  $(-3, -1)$  i  $(6, 2)$ , prosta  $l$  przez  $(2, 4)$  i  $(-1, 1)$ , a prosta  $m$  przez  $(5, -1)$  i  $(0, 4)$ . Punkty przecięcia tych prostych są wierzchołkami trójkąta ABC.

a) Oblicz pole trójkąta ABC.

b) Oblicz długość środkowej opuszczonej na najdłuższy bok.

**Zad. 7.** Rowerzysta jadąc ze stałą prędkością  $v$  pokonał pewną trasę w czasie  $t$ . Gdyby jego prędkość była o 1 km/h większa, to czas przejazdu byłby o 9 minut krótszy, gdyby zaś była o 4 km/h mniejsza, to czas przejazdu byłby o 45 minut dłuższy. Oblicz przebytą przez rowerzystę drogę, prędkość rowerzysty i czas przejazdu.

**Zad. 8.** Trasa rajdu samochodowego miała długość 432 km. Zwycięzca rajdu pokonał tę trasę o 3 godziny szybciej niż ostatni zawodnik. Średnia prędkość zwycięzcy była o 12 km/h większa od średniej prędkości ostatniego zawodnika. Oblicz czas przejazdu obu tych zawodników.

**Zad. 9.** Zapisz wyrażenie  $\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 10\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5}$  bez użycia pierwiastka.

**Zad. 10.** Dane są roztwory 4% i 15% kwasu siarkowego. W jakim stosunku należy je mieszać, aby otrzymać roztwór 10% tego kwasu?