

XV KONKURS MATEMATYCZNY „EUKLIDES”

Zadania - finał

Zadanie 1.

Gdy państwo Graczykowie zajęli miejsca w samolocie okazało się, że mają łącznie 94 kg bagażu. Pan Graczyk zapłacił za nadbagaż 15zł, a pani Graczyk 20zł. Gdyby pan Graczyk podróżował sam z bagażem obojga, to za nadbagaż zapłaciłby 135zł. Ile kg bagażu może bezpłatnie wziąć ze sobą pasażer? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2.

W trójkąt ABC wpisano okrąg styczny do boków AB, BC i AC odpowiednio w punktach K, L, M. Wiedząc, że $|AK| = 2\text{cm}$, $|LC| = 3\text{cm}$ i kąt $ACB = 60^\circ$ oblicz pole trójkąta ABC.

Zadanie 3.

Rosnące ciągi arytmetyczny i geometryczny mają pierwsze wyrazy równe 9. Trzecie wyrazy tych ciągów są także równe. Drugi wyraz ciągu geometrycznego jest o 2 mniejszy od drugiego wyrazu ciągu arytmetycznego. Wyznacz te ciągi. Podaj wzory na ogólne wyrazy tych ciągów.

Zadanie 4.

Punkt $A = (1,5)$ jest wierzchołkiem kwadratu ABCD. Jeden z boków tego kwadratu zawiera się w prostej $2x - y - 2 = 0$. Oblicz pole kwadratu. Wyznacz współrzędne środka okręgu opisanego na tym kwadracie.

Zadanie 5.

Funkcja kwadratowa dana wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a \neq 0$ przyjmuje wartości ujemne wtedy i tylko wtedy, gdy $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty)$, a jej wykres przecina oś OY w punkcie $P = (0, 4)$. Wyznacz współczynniki a, b, c , następnie oblicz największą i najmniejszą wartość funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle -6, 3 \rangle$