

XIII KONKURS MATEMATYCZNY „EUKLIDES”

Zadania etap szkolny

- Dane są funkcje liniowe f i g określone wzorami $f(x) = (k + 2)x - 2k$ i $g(x) = -2x + 2 - 4k$. Wiedząc, że wykresy tych funkcji są prostymi prostopadłymi wyznacz:
 - $k \in \mathbf{R}$ oraz miejsca zerowe funkcji f i g
 - pole trójkąta ograniczonego wykresami funkcji f i g oraz osią odciętych.
- Wykaż, że dla dowolnego kąta ostrego α wyrażenie $\left(\frac{1+\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} + \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{1-\sin\alpha}\right) \cdot \cos\alpha$ jest liczbą pierwszą.
- Rozwiąż nierówność, $(x - 2)^3 - (3x + 4)^2 > 12(x + 1) + x^3 - 36$ rozwiązanie przedstaw na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału liczbowego, następnie podaj największą liczbę całkowitą spełniającą dana nierówność.
- Dla jakich wartości $m \in \mathbf{R}$ funkcja kwadratowa $f(x) = (m^2 - 9)x^2 + 2m$ osiąga wartość najmniejszą, jeśli do wykresu należy punkt $A = (1, -1)$. Dla znalezionych wartości m wyznacz współrzędne wierzchołka funkcji f .
- Z punktu A leżącego na okręgu poprowadzono dwie cięciwy AB i AC . Miara kąta zawartego między styczną poprowadzoną do okręgu w punkcie A a cięciwą AB wynosi 40° , natomiast między styczną a cięciwą AC wynosi 60° . Wyznacz miarę kątów trójkąta ABC .
- Wykaż, że wyrażenie: $\sqrt{25 - 10x + x^2} + |3 - 2x| - \sqrt{9x^2 + 24x + 16}$ dla wszystkich $x \in \langle -5, -2 \rangle$ ma stałą wartość.
- Dany jest wielomian $W(x) = x^4 + (m^2 - 5)x^3 - x - 4$
 - Rozłóż ten wielomian na czynniki stopnia możliwie najniższego dla $m = 3$.
 - Wyznacz pierwiastki wielomianu dla $m = 3$.
 - Wykaż, że dla $m = \sqrt{5}$ i dowolnej liczby rzeczywistej x podany wielomian ma wszystkie wartości większe od wartości funkcji $f(x) = -x - 5$.
- Dane jest wyrażenie: $\left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{x-1}\right) \cdot \frac{1-2x+x^2}{6x-6}$, $x \neq 1$
 - Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -3$
 - Wykaż, że wartość wyrażenia jest stała
- Suma cyfr liczby trzycyfrowej podzielnej przez 5 jest równa 15. Zapisując cyfry tej liczby w odwrotnej kolejności otrzymujemy liczbę trzycyfrową o 198 większą od początkowej. Wyznacz liczbę początkową.
- W trójkącie ABC ostrokątnym wysokość CD ma długość 6 oraz $\frac{|CD|}{|CB|} = 0,5$ i $\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Oblicz obwód trójkąta ABC .